

Vénus, Batman et $\frac{2}{3}$

Du bon usage des guillemets en mathématiques (et ailleurs)

Nicolas Erdrich

11 novembre 2018

1 Introduction

Selon l'entrée « Fractions » de l'*Encyclopedia of Mathematical* publiée en ligne par *The European Mathematical Society*, les fractions sont définies¹ par des relations d'équivalence :

Fractions may be represented as ordered pairs of integers (a, b) , $b \neq 0$, for which an equivalence relation has been specified (an equality relation of fractions), namely, it is considered that $(a, b) = (c, d)$ if $ad = bc$. [12].

Or l'un des problèmes concernant la compréhension de la notion de fraction relève justement de la relation d'identité. Lorsqu'on demande à un élève d'admettre l'égalité $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, un obstacle épistémique surgit d'emblée : à droite et à gauche du signe d'égalité apparaissent des signes différents, nonobstant l'identité qui est affirmée².

Les sections suivantes ont pour enjeu d'éclaircir ce paradoxe. A cette fin, je le replace dans son contexte historique et philosophique. Dans une première section, je donne un aperçu de la conception sémantique du logicien Gottlob Frege (1848-1925) qui, après l'avoir mis en exergue, donna une solution au paradoxe de l'identité en attribuant une signification référentielle aux expressions similaires à $\frac{2}{3}$. Je traite ensuite des problèmes afférents aux contextes opaques qui nécessitent l'usage de guillemets, et au problème général des noms vides. Je rappelle brièvement, la conception opposée, anti-réaliste, représentée par Ludwig Wittgenstein, conception qui consiste à vider complètement la signification des expressions mathématiques de tout contenu référentiel. Enfin, je conclus en soulignant les problèmes qui résultent de la confusion entre l'usage transparent ou opaque des signes, du moins lorsque ces usages ne sont pas différenciés de manière explicite.

1. On remarquera déjà une certaine ambiguïté dans cette citation puisqu'il est plus précisément stipulé que les fractions sont « représentées (represented) » plutôt que « définies ». De plus, il n'est pas non plus très clair de savoir si la représentation doit être prise dans un sens psychologique (image mentale d'une chose) ou dans un sens purement ensembliste (le représentant d'un ensemble).

2. En dépit de sa formulation très simple, ce problème est loin d'être trivial, et lorsqu'on creuse la question, il apparaît même d'une complexité redoutable. Il n'est, bien sûr, pas restreint au seul cas des fractions. On le retrouve dans des questions bien plus générales comme celle de la permanence et du changement d'une chose, celle de la persistance d'un individu à travers le temps (identité personnelle) ou encore celle de l'identité modale, autrement dit, de la possibilité qu'un objet connût une carrière alternative. Ces énigmes sont anciennes : les grecs antiques se demandaient déjà si le bateau de Thésée, qu'ils choyaient dans le port du Pirée et dont ils avaient restauré toutes les parties, était encore le même bateau que celui sur lequel naviguait le héros athénien. Elles relèvent du sens commun : comme lorsque, observant des photographies, nous nous demandons en quoi l'enfant qui y est représenté est le même individu que l'adulte qui les regarde alors qu'il est très probable que l'enfant et l'adulte ne partagent pas la moindre cellule. Enfin, il n'est pas évident de savoir à qui ou à quoi nous référons lorsque nous disons de propositions modales comme « Emmanuel Macron aurait pu ne pas être élu » qu'elles sont vraies, parce qu'elles paraissent référer à un même individu vivant des carrières alternatives, autrement dit, à un double de lui-même.

2 La conception référentielle de l'énoncé « $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ »

Dans l'article « Sens et dénotation » [2], le mathématicien et logicien allemand Gottlob Frege posa le problème de l'identité sous une forme logico-sémantique qui ouvrit tout un domaine de recherches logiques et philosophiques. Son influence, peu importante lors de sa carrière de professeur, s'exerça tardivement par la médiation de logiciens comme Bertrand Russell (1872-1970) [11] et Ludwig Wittgenstein (1889-1951) [13] qui firent connaître, développèrent et critiquèrent ses travaux. Les articles séminaux de Frege et les développements qu'en firent Russell et Wittgenstein contribuèrent à orienter ainsi la philosophie vers ce qu'on a aujourd'hui coutume de dénommer le tournant linguistique (*linguistic turn*), à savoir la méthode consistant à résoudre des problèmes de type épistémique en les interprétant comme des problèmes de philosophie du langage. Actuellement, les polémiques concernant l'identité demeurent toujours centrées autour de l'héritage de Frege, qu'elles en acceptent les thèses ou qu'elles les rejettent.

Résumons le travail de Frege : il constate d'abord qu'un paradoxe sémantique résulte de la distinction entre l'assertion « $a = a$ », qui exprime une proposition à la fois analytique et *a priori*³ et l'assertion « $a = b$ » qui exprime une proposition informative. Il considère les deux propositions exprimées par les phrases suivantes, propositions qui sont également vraies :

- (1) « Phosphorus est identique à Phosphorus » ;
- (2) « Hesperus est identique à Phosphorus ».

Il s'agit de la même relation qui apparaît dans les deux occurrences, mais elle n'a pourtant pas les mêmes répercussions épistémiques. En effet, alors que la première expression relève d'une caractérisation triviale et sans importance en terme de connaissance, la deuxième expression révèle en revanche un contenu informatif qui ne peut être dû qu'au développement des connaissances en astronomie. Cette différence au sein d'une même relation conduit ainsi à une contradiction dont Frege a le mérite d'avoir souligné l'importance : les énoncés d'identité sont parfois analytiques et *a priori* mais parfois aussi synthétiques et *a posteriori*. La question cruciale de l'identité est donc d'expliquer cette apparente contradiction. Pour ce qui nous concerne, il s'agit plus particulièrement d'expliquer par exemple la différence épistémique entre l'égalité analytique et *a priori* « $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ » et l'égalité « $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ ».

Frege donne la solution suivante à ce paradoxe : l'identité ne porte pas seulement sur les signes ou sur les choses elles-mêmes, mais sur les deux à la fois. Il faut donc que la signification soit elle-même double. En conséquence, Frege fait intervenir deux composantes sémantiques, la première, qu'il appelle « dénotation » (*Bedeutung*), relève de la capacité du langage à référer aux choses, la deuxième, qu'il appelle le « sens » (*Sinn*), est le mode d'accès à la dénotation. Cette distinction semble résoudre l'apparent paradoxe sémantique de l'identité, car sous cette perspective, Phosphorus est bien identique à Hesperus en ce que les deux termes font référence à la même planète Vénus. En revanche, ils diffèrent selon leur mode d'accès à cette référence. Pour la première expression, la façon d'accéder à la référence peut par exemple être paraphrasée par une description définie comme « la dernière étoile visible à l'œil nu à l'aube » et la deuxième peut être paraphrasée par la description définie « la première étoile visible à l'œil nu au crépuscule ». Les descriptions sont bien différentes, mais la référence demeure la même⁴. Fin du paradoxe.

3. Analytique : c'est-à-dire que l'information dégagée provient directement de la définition de l'objet considéré. Une connaissance est dite *a priori* si elle ne nécessite pas le recours à l'expérience (cf. Kant, *Critique de la Raison Pure*).

4. Bertrand Russell a radicalisé le point de vue de Frege en réduisant la classe des noms propres (au sens logique) aux seuls termes déictiques comme « lui » ou « ceci » et en considérant que les noms propres (au sens grammatical) comme « Emmanuel Macron » sont en fait des abréviations de descriptions définies, comme par exemple « l'actuel président de la République française ». Une autre théorie sémantique a été développée par Saul Kripke [3] dans les

Il existe cependant certains contextes où les choses sont un peu plus compliquées, notamment quand la référence ne se fait plus à travers le signe de façon directe, mais, selon l'appellation de Frege, de manière *oblique*. La différence entre les contextes directs et obliques est indiquée par le rôle que joue le principe logique de substitution *salva veritate*. Ce principe, mis en exergue par Leibniz, affirme que dans toute proposition vraie, l'on peut substituer un terme à un autre lorsqu'ils sont équivalents, tout en maintenant la valeur de vérité de la proposition considérée. En appliquant ce principe, on peut par exemple obtenir la dérivation suivante :

- | | |
|--------------------------------|--|
| (3) Phosphorus est Vénus | prémisse |
| (4) Vénus est une planète | prémisse |
| (5) Phosphorus est une planète | (3) et (4) et principe de substitution <i>salva veritate</i> |

Il existe néanmoins des contextes dans lesquels le principe ne s'applique plus. Considérons l'exemple suivant :

- | | |
|--|----------|
| (6) Phosphorus = Vénus | prémisse |
| (7) Phosphorus est un mot de dix lettres | prémisse |

Contrairement à l'exemple précédent, il est maintenant faux de déduire que Vénus est un mot de dix lettres. Pour expliquer ceci, Frege propose d'introduire une notation selon que la référence est ce à quoi renvoie habituellement le terme ou au terme lui-même. Dans ce dernier cas, Frege propose l'usage des guillemets. Avec cet artifice, il n'y a plus de contradiction à dire que Phosphorus est Vénus et dans le même temps que « Phosphorus » est un mot de dix lettres. Cela n'implique nullement la vérité de « Vénus est un mot de dix lettres », puisque la référence ne porte plus sur la planète réelle, mais sur le terme lui-même :

Si on emploie les mots de la manière habituelle, c'est de leur dénotation qu'on parle. Mais il se peut qu'on veuille parler des mots eux-mêmes ou de leur sens. Le premier cas est celui où, par exemple, on cite au style direct les paroles d'un autre. Les mots prononcés dénotent alors les mots d'autrui et ce sont ces derniers qui ont la dénotation habituelle. Nous avons ainsi affaire à des signes de signes. Dans le cas d'un signe écrit, on met les mots entre guillemets. Un mot entre guillemets ne peut donc pas être pris dans sa dénotation habituelle.[2, pp. 104-105].

Mais ces problèmes ne se limitent d'ailleurs pas à ce genre de situations où c'est le signe en tant que signe qui est visé plutôt que sa dénotation habituelle. Des cas similaires sont omniprésents dans les contextes dits « intentionnels »⁵. Ces contextes sont caractérisés par le fait que le principe de substitution *salva veritate* ne s'applique plus. Ils sont repérables à ce que les phrases qui les expriment mentionnent des verbes d'attitudes intentionnelles comme « considérer », « croire », « désirer », « craindre », etc. :

- | | |
|--|----------|
| (8) Phosphorus = Vénus | prémisse |
| (9) Jean croit que Phosphorus est identique à Phosphorus | prémisse |

années 60 contre la théorie des descriptions définies de Russell. Elle est aujourd'hui assez globalement acceptée et très utilisée. Elle trouve sa justification dans l'interprétation des propositions modales par la sémantique des mondes possibles. Elle se différencie de la théorie de Frege-Russell par l'affirmation de deux thèses : celle de la référence directe (les noms propres réfèrent directement, ils ne sont pas des descriptions définies) et la thèse de la désignation rigide (une identité entre deux noms propres est nécessaire, autrement dit, valable dans tous les mondes possibles).

5. A ne pas confondre avec l'intentionnalité.

Là encore, il est évidemment faux d'en déduire que Jean croit que Phosphorus est Vénus. Selon Frege, la raison en est que dans le cas particulier de ces exemples, la dénotation n'est pas, comme c'est habituellement le cas, sa valeur de vérité, mais la manière d'accéder à cette valeur, c'est-à-dire ce qui relève habituellement du sens. Selon Frege, il y a donc différents fonctionnements des noms selon le contexte de leur emploi. Lorsqu'il s'agit d'un contexte indirect, c'est le sens qui occupe la place de la référence : la mention est substituée à l'usage :

Dans de tels exemple, il n'est pas permis de remplacer une expression figurant dans la subordonnée par une autre ayant même dénotation habituelle ; on peut seulement lui substituer une expression ayant même dénotation indirecte, c'est-à-dire le même sens habituel. (...) La seule conclusion légitime est que la dénotation d'une proposition n'est pas toujours sa valeur de vérité et que « l'étoile du matin » ne dénote pas toujours la planète Vénus, précisément lorsque ces mots ont une dénotation indirecte.[2, p. 113].

Tournons-nous plus particulièrement sur le problème qui nous concerne, celui des fractions :

$$(10) \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad \text{prémisse}$$

$$(11) \quad \frac{2}{3} \text{ est une fraction de dénominateur } 3. \quad \text{prémisse}$$

Il est bien sûr faux d'en déduire que $\frac{4}{6}$ est une fraction de dénominateur 3. Le principe de substitution *salva veritate* ne s'applique pas. De même,

$$(12) \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad \text{prémisse}$$

$$(13) \quad \text{Jean sait que } \frac{2}{3} \text{ est égale à } \frac{2}{3} \quad \text{prémisse}$$

Nous ne pouvons pas déduire que Jean sait que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

Comme Frege, le logicien américain Willard Van Orman Quine (1908-2000) a distingué deux caractères différents du signe : il est généralement transparent, dans son usage habituel, en ce qu'il favorise la dénotation plutôt que la considération du terme pour lui-même. Mais le signe peut aussi devenir *opaque* lorsque la référence n'est plus sa dénotation habituelle, mais le sens, autrement dit, quand il devient *un nom de nom*. Quine souligne à cet égard un manque de rigueur des mathématiciens dans les notations qui concernent le métalangage. Ils sont généralement peu scrupuleux à distinguer entre signe et signifié. Le constat de Quine est appuyé sur l'observation de manuels de mathématiques cités en exemple. Je reprends le passage dans son intégralité en le traduisant, parce qu'il est révélateur des ambiguïtés qu'on trouve dans les manuels et les programmes. En outre, il a été écrit par Quine en 1940. La situation décrite ne semble donc pas s'être améliorée entre-temps :

Le manque de soin à distinguer entre le nom et ce qui est nommé est assez commun dans les écrits mathématiques. Le passage suivant, concernant le calcul différentiel, tiré d'un manuel à large publication, est assez typique :

L'expression $D_x y \Delta x$ est appelée la différentielle de la fonction et est dénotée par dy :

$$dy = D_x y \Delta x.$$

La troisième ligne de ce passage, une équation, est apparemment supposée reproduire le sens des deux premières lignes. Mais en fait, alors que l'équation dit que les entités dy et $D_x y \Delta x$ (quoiqu'elles puissent être) sont les mêmes, les deux lignes qui précèdent disent plutôt que l'une est

un nom pour l'autre. Et la première ligne du passage implique des difficultés plus sérieuses encore : prise littéralement, elle implique que l'expression explicite ' $D_{xy}\Delta x$ ' constitue un nom pour une autre expression, celle-ci implicite, qui est connue comme différentielle. Mais ces difficultés peuvent être évitées par une simple reformulation du passage : faites tomber les deux premiers mots et changez « et est dénotée par » par « ou brièvement ». Les confusions déclaratives de cette sorte ont persisté parce que, dans la plus plupart des recherches mathématiques, elles ne se sont jamais faites sentir comme des obstacles pratiques. Elles donnent en effet naissance à des perplexités mineures, même au niveau de l'arithmétique élémentaire. Un étudiant en arithmétique pourrait se demander, par exemple, comment 6 pourrait être le dénominateur de $\frac{4}{6}$ et pas celui de $\frac{2}{3}$ alors que $\frac{4}{6}$ est égale à $\frac{2}{3}$. Cette énigme émerge de l'échec à voir que ce sont seulement les fractions « $\frac{4}{6}$ » et « $\frac{2}{3}$ » qui ont un dénominateur, alors que ce sont les rationnels $\frac{4}{6}$ et $\frac{2}{3}$ qu'elles désignent qui sont identiques. Mais c'est principalement dans la logique mathématique que l'on constate que la négligence de ces distinctions a des effets plus graves. ⁶[8, p. 25].

On doit bien reconnaître que l'amphibologie entre le signe et le signifié est toujours d'actualité dans les manuels contemporains (et donc que sa mise en garde est demeurée jusque-là sans effet). Pour preuve, voici deux assertions contradictoires où les fractions sont considérées alternativement comme des nombres ou comme des écritures de nombres, assertions relevées dans les documents officiels :

- Les fractions sont assimilées à des nombres : « Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres. » [6, p. 3]
- Les fractions sont assimilées à des écritures : « Les nombres que l'on peut écrire sous la forme d'une fraction sont appelés les nombres rationnels » [5, p. 1]

On peut toutefois douter que ce soit seulement en logique mathématique que de telles ambiguïtés s'avèrent néfastes. Contrairement à ce qu'écrit Quine, il est probable que ces ambiguïtés impliquent des obstacles épistémiques dans l'apprentissage des élèves.

3 Le prix à payer : le problème des noms vides

La bivalence sémantique qu'introduit Frege par la présupposition du sens implique néanmoins un coût théorique important, puisqu'il duplique le monde factuel par un monde tout aussi objectif des sens en stipulant un « troisième domaine » qui se tient entre le monde matériel (purement objectif) et le monde des représentations (purement subjectif) :

6. Citation originale de Quine : « Lack of care in thus distinguishing the name from the named is common in mathematical writings. The following passage, from a widely used textbook on the differential calculus, is fairly typical : The expression $D_{xy}\Delta x$ is called the differential of the function and is denoted by $dy = D_{xy}\Delta x$. The third line of this passage, an equation, is apparently supposed to reproduce the sense of the first two lines. But actually, whereas the equation says that the entities dy and $D_{xy}\Delta x$ (whatever these may be) are the same, the preceding two lines say rather that the one is a name of the other. And the first line of the passage involves further difficulties ; taken literally it implies that the exhibited expression ' $D_{xy}\Delta x$ ' constitutes a name of some other, unexhibited expression which is known as a differential. But all these difficulties can be removed by a slight rephrasing of the passage : drop the first two words and change 'and is denoted by' to 'or briefly'. Expository confusions of this sort have persisted because, in most directions of mathematical inquiry, they have not made themselves felt as a practical obstacle. They do give rise to minor perplexities, indeed, even at the level of elementary arithmetic. A student of arithmetic may wonder, e.g., how 6 can be the denominator of $\frac{4}{6}$ and not of $\frac{2}{3}$ when $\frac{4}{6}$ is $\frac{2}{3}$; this puzzle arises from failure to observe that it is the fractions ' $\frac{4}{6}$ ' and ' $\frac{2}{3}$ ',⁷ that have denominators, whereas it is the designated ratios $\frac{4}{6}$ and $\frac{2}{3}$ that are identical. But it is primarily in mathematical logic that carelessness over these distinctions is found to have its more serious effects. »

Les pensées sont ni des choses du monde extérieur, ni des représentations. Il faut admettre un troisième domaine. Ce qu'il enferme s'accorde avec les représentations en ce qu'il ne peut pas être perçu par les sens, mais aussi avec les choses en ce qu'il n'a pas besoin d'un porteur dont il serait le contenu de conscience. Telle est par exemple la pensée que nous exprimons dans le théorème de Pythagore, vraie intemporellement, vraie indépendamment du fait que quelqu'un la tienne pour vraie ou non[2].

En outre, en passant de l'exemple des planètes à celui des fractions surgit en fait une nouvelle difficulté (et de taille) : là où le nom propre « Phosphorus » réfère à une chose existante (la planète bien concrète Vénus), le nom « $\frac{2}{3}$ » est un *nom vide*, autrement dit, un nom n'ayant aucune référence étendue dans l'espace et le temps. On peut également comparer ceci à une proposition impliquant des termes fictionnels comme dans les identités suivantes :

(14) Batman est Bruce Wayne

(15) Batman est Clark Kent

Généralement, le problème des noms vides prend une dimension différente selon l'option philosophique retenue. Du point de vue d'une tradition réaliste, le nom « $\frac{2}{3}$ » n'est pas si vide que cela, mais il fait référence à un objet qui *subsiste* plutôt qu'il n'existe. La référence du nom est alors considérée soit comme une *propriété abstraite in rebus*, c'est-à-dire présente dans une chose et donc liée d'une quelconque manière à la réalité (point de vue aristotélicien), soit comme un objet purement psychologique (point de vue conceptualiste), soit comme un objet *idéal ante rem* complètement autonome et déraciné du réel (point de vue platonicien retenu par Frege). La stratégie réaliste consiste donc à étendre la référence par delà l'existence spatio-temporelle et causale. Si Frege conçoit que les nombres tombent sous ce genre d'objets non-causaux, en revanche, il refuse toute référence aux noms fictionnels. Ainsi, contrairement à « $\frac{2}{3}$ », le nom propre « Bruce Wayne » est bien un authentique nom vide.

Mais cela constitue une difficulté majeure. Le dualisme sémantique de Frege, qui départage entre sens et référence, n'est pas seulement admis au niveau des seuls noms propres. Il vaut également au niveau des propositions. La référence d'une proposition, c'est sa valeur de vérité. Les propositions n'ont donc que deux références possibles : la vérité ou la fausseté. En revanche, elles sont diversifiées par le mode d'accès à leur référence, c'est-à-dire par leur sens. La sémantique frégréenne repose en outre sur le principe de composition : la valeur de vérité d'un énoncé, c'est-à-dire sa référence, dépend intrinsèquement des composantes sémantiques de cet énoncé. Un énoncé contenant un nom vide est conséquemment sans valeur de vérité, autrement dit, ni vrai, ni faux. On constate tout de suite la lourde conséquence de ce fait : parce qu'elle refuse une dénotation aux énoncés contenant des termes fictifs, la théorie sémantique de Frege est incapable de différencier la valeur sémantique des deux énoncés précédents.

En admettant un sens mais pas une référence, Frege isole les énoncés fictionnels dans le domaine purement esthétique : ils peuvent produire des effets de sens, mais jamais constituer des connaissances. Cela revient à dire qu'un roman de Balzac ne nous apprend rien de la société. Et si l'on doute de la référence des termes mathématiques, cela revient également à dire par exemple que la théorie des groupes ne nous apprend rien de la structure des cristaux. La sémantique de Frege paraît en cela très critiquable parce qu'il semble raisonnable d'affirmer que la proposition exprimée par (14) est vraie quand celle exprimée par (15) s'avère fausse. Et il semble également vrai d'affirmer qu'il est le cas que Batman n'existe pas, ce dont la sémantique frégréenne est incapable de rendre compte. Par

ailleurs, il semble également raisonnable de prétendre qu'une théorie sémantique pertinente devrait fonctionner d'une manière similaire quand elle concerne des énoncés mathématiques ou quand elle concerne des énoncés fictionnels. Cette objection sert d'ailleurs de pivot aux critiques actuelles de la sémantique frégéenne⁸.

4 La conception grammaticale de l'énoncé « $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ »

Il existe cependant une autre tradition, anti-réaliste, qui refuse d'admettre les nombres au sein de l'ontologie (ensemble des choses qui sont). Le monde non causal et invisible des nombres constitue l'angle d'attaque pour la conception de Ludwig Wittgenstein. Selon ce dernier l'explication de Frege est complètement erronée dans la mesure où il analyse les énoncés arithmétiques comme « $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ » selon deux types de significations, sens et dénotation. En effet, Wittgenstein soutient qu'il est absurde d'analyser l'énoncé selon deux sens attribués à la même référence que serait le même nombre représenté par chacune des deux fractions. Il n'y a pas reconnaissance d'un même objet vu à travers des expressions différentes, comme l'on reconnaît la même table à travers des points de vue différents. Pour Wittgenstein, l'identité est essentiellement simple, triviale, tautologique :

Dire de deux choses qu'elles sont identiques est une absurdité, et dire d'une chose qu'elle serait identique à elle-même, c'est ne rien dire du tout.[13].

Ce à quoi nous avons réellement affaire dans l'égalité « $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ » n'est pas la reconnaissance d'un même nombre à travers différentes expressions, mais l'apprentissage d'une règle

contribuant à fixer le sens, autrement dit l'usage, des signes (...) qu'elle comporte. La règle en question ne découle pas d'un acte de compréhension, ne répond à aucune réalité, fût-ce à une réalité « idéale ». Elle ne répond donc pas à la réalité, elle la constitue. La mythologie du corps de signification nous pousse à croire que nous avons affaire, derrière les signes, à deux sens (...).[4, p. 91].

Pour Wittgenstein, l'énoncé précédent le cache pas une référence partagée à un nombre, mais relève d'une d'une grammaire des signes. Il est absurde de vouloir soutenir un quelconque sens propositionnel résultant de la composition des différents éléments de l'énoncé. Ce dernier exprime en réalité une règle ayant pour objet de rendre compte de la formation d'énoncés empiriques tels que « manger $\frac{4}{6}$ d'une tarte, c'est en manger les $\frac{2}{3}$. » Il y a donc chez Wittgenstein une démarcation très nette entre mathématiques appliquées et mathématiques pures, ces dernières ne relevant que de la grammaire, autrement dit, des règles de formations correctes des énoncés mathématiques.

Ainsi, selon Wittgenstein, l'identité ne relie aucune chose mais exclusivement les signes. L'identité est d'emblée incorporée à la signification d'un nom : deux signes sont équivalents s'ils ont même signification, autrement dit, s'ils sont synonymes. Ainsi, les énoncés d'identité ne sont pas des propositions élémentaires. Plus encore, elles n'ont pas même de sens :

Pouvons-nous comprendre deux noms sans savoir s'ils désignent la même chose ou deux choses différentes - Pouvons-nous comprendre une proposition où apparaissent deux noms sans savoir s'ils ont même signification ou des significations différentes. Si je connais la signification d'un mot anglais et de son équivalent allemand, il est impossible que je ne sache pas qu'ils sont équivalents ; il est impossible que je ne puisse les traduire l'un par l'autre. Des expressions

8. A ce sujet, conférer Francesco Berto [1] ou Graham Priest [7]. La grande majorité des théories actuelles sont ultra-réalistes : elles s'accordent à admettre la subsistance des nombres et des personnages de fiction. De leur point de vue, Sherlock Holmes est un objet actuel du monde réel, objet qui, *littéralement*, possède la propriété de ne pas exister, en plus de celle d'être un habile détective londonien morphinomane et misogyne.

comme « $a = a$ », ou celles qui en dérivent, ne sont ni des propositions élémentaires, ni même des signes pourvus de sens.[13, aph. 4.243].

Aussi, Wittgenstein considère que le signe d'égalité marque la synonymie subsistant entre deux termes, et non l'identité de référence : « Que l'identité ne soit pas une relation entre des objets, cela tombe sous le sens » [13]. L'identité n'est qu'un simple processus de substitution des termes d'une proposition sans changement de valeur de vérité. Le signe d'égalité marqué entre deux expressions ne signifie rien d'autre que la possibilité de substitution de ces expressions. En outre, un système logique peut parfaitement se passer du signe d'égalité. L'identité de l'objet doit être formulée par l'identité du signe, plutôt que par un signe d'identité. Écrire « a » suffit à énoncer l'identité de a , à condition bien sûr de restreindre l'usage d'une même lettre à une même chose ou à condition de considérer de manière converse que des symboles différents concernent toujours des choses distinctes.

5 Conclusion

Pour résumer, on constate ainsi que de Frege à Wittgenstein, on a affaire à deux conceptions antagonistes. Celle de Frege rend compte de la signification par le biais d'une duplication sémantique entre référence et sens. Elle présuppose alors un domaine autonome d'entités idéales auquel les noms propres comme $\frac{2}{3}$ font référence, à savoir les nombres. Les énoncés doivent alors être désambiguïsés par l'apposition de guillemets lorsque ce n'est pas l'usage du terme qui est la source de la référence mais sa mention. On écrira donc « $\frac{2}{3}$ est égale à $\frac{4}{6}$ ». Mais en revanche, il faudrait ajouter les guillemets pour parler par exemple du dénominateur de « $\frac{2}{3}$ », parce que la référence ne porte plus sur le nombre, mais sur l'écriture du nombre, c'est-à-dire sur la mention, sur la fraction.

La deuxième conception, wittgensteinienne, refuse la dualité sémantique et réduit alors le sens à la seule règle d'utilisation du langage mathématique, règles qui rendent compte de nos usages linguistiques. Il n'y a plus besoin de désambigüer, parce que les fractions ne sont rien d'autre que des écritures ou des règles d'écritures. Le sens, c'est la règle d'usage. Autrement dit, Wittgenstein vide complètement la notion de sens. Le sens d'une fraction est son usage, c'est la règle de formulation qui en préside les usages.

Dans le *Tractatus Logico-Philosophicus* [13], Wittgenstein affirme que le langage est fermé sur lui-même. Il n'y a pas d'extériorité au langage, pas de métalangage. Parler d'un usage métalinguistique ne serait somme toute que parler d'un jeu de langage parmi d'autres, sans prééminence par rapport aux autres. Contrairement à Wittgenstein, Quine a développé une théorie des niveaux de métalangage qui régiment l'usage des guillemets pour passer d'un niveau de langage (langage objet) à un niveau supérieur (méta-langage). La capacité expressive du langage formel ou langage-objet est inférieure à celle de la langue vernaculaire dont le niveau supérieur permet de rendre compte de niveau de signification entre opacité et transparence référentielle :

The name of a name or other expression is commonly formed by putting the named expression in single quotation marks ; the whole, called a quotation, denotes its interior. (...) Scrupulous use of quotation marks is the main practical measure against confusing objects with their names.[8, p. 23].

Entre les théories sémantiques de Frege et de Wittgenstein, autrement dit, entre le dualisme sémantique et le monisme sémantique, le didacticien semble aller désespérément de Charybde en Scylla : car soit il considère que les notations renvoient à des entités abstraites qui, littéralement, n'existent pas (ce qui semble aussi absurde que d'admettre la subsistance de Sherlock Holmes et des carrés-ronds), soit il considère que les identités du type « $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ » ne renvoient à aucun sens extra-

linguistique, et il lui devient difficile de parler en termes de représentations différentes d'une même chose. Il est alors convié à parler de règles de formation des énoncés corrects sans pouvoir s'appuyer véritablement sur un sens. Et il n'y a plus moyen d'exprimer une notion comme la « fraction d'une chose », puisque justement la fraction ne renvoie à *aucune chose*. Aucune des deux options précédentes ne semble ragoûtante. C'est peut-être l'une des raisons pour laquelle les textes des manuels et des programmes passent indifféremment de l'une à l'autre. Mais cela contribue à produire inévitablement certaines confusions.

Comme nous l'avons vu, dans la conception de Frege, c'est l'aspect représentationnel du signe qui prime. Lorsqu'il n'est pas entouré de guillemets, le signe s'efface pour indiquer la référence qu'il désigne. C'est seulement entouré de guillemets que le signe redevient objet de considération. Comme l'écrit François Récanati,

Transparence et opacité sont ainsi les deux destins possibles du signe : soit le signe, opaque, apparaît comme chose, soit, au contraire, il acquiert une quasi-invisibilité et, diaphane, s'évanouit devant la chose signifiée.[10, p. 33].

Une manière de sauver les choses consisterait à critiquer à la fois le dualisme sémantique frégeen et la conception purement grammaticale de Wittgenstein en admettant une position tierce, pragmatique⁹ : les énoncés connaissent certes des contextes transparents ou opaques, mais ils ne reçoivent pas leur signification de manière purement linguistique ou grammaticale. Les contextes d'usage participent à conférer leur valeur de vérité aux énoncés. En ce sens, au niveau du métalangage, une certaine ambiguïté est sans doute inévitable.

Références

- [1] Francesco BERTO. *Existence as a real property. The Ontology of Meinongianism*. Synthese library Studies in Epistemology, logic, methodology and philosophy of science. Springer, 2013.
- [2] Gottlob FREGE. « Sens et dénotation ». In : Gottlob FREGE. *Écrits logiques et philosophiques. Traduction de Claude Imbert*. Éditions du Seuil, 1971.
- [3] Saul KRIPKE. « Semantical Considerations on Modal Logic ». In : *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963), p. 83–94.
- [4] Michel LE DU. *Qu'est-ce qu'un nombre ?* Chemins Philosophiques. Vrin, 2004.
- [5] « Fractions et nombres décimaux au cycle 3 ». In : *Document d'accompagnement des programmes* (nov. 2016). Sous la dir. de Ministère de l'Éducation NATIONALE.
- [6] « Programme de Mathématiques du cycle 3 ». In : *Bulletin officiel du 21-06-18* 25 (juin 2018). Sous la dir. de Ministère de l'Éducation NATIONALE.
- [7] Graham PRIEST. *Towards non-Being : The Logic and Metaphysics of Intentionality*. Oxford : Oxford University Press, 2005.
- [8] Willard Van Orman QUINE. *Mathematical Logic*. Harvard University Press, 1979b.
- [9] Manuel REBUSCHI. *Qu'est-ce que la signification ?* Chemins Philosophiques. Librairie Philosophique J. Vrin, 2008.
- [10] François RÉCANATI. *La transparence et l'énonciation. Pour introduire à la pragmatique*. L'ordre philosophique. Seuil, 1979.
- [11] Bertrand RUSSELL. « On denoting ». In : *Mind* XIV.4 (1905), p. 479–493.

9. En réalité, cette position a également été esquissée par Wittgenstein après le *Tractatus*

- [12] « Fraction ». In : *Encyclopedia of Mathematics* (Consulté en ligne le 21/10/2018). Sous la dir. de The European Mathematical Society (SPRINGER). URL : <http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Fraction&oldid=30892>.
- [13] Ludwig WITTGENSTEIN. *Tractatus logico-philosophicus (1921)*. Collection tel. Gallimard, 1961.